

C.N \Rightarrow C.U \Rightarrow C.S
 \Rightarrow C.A \Rightarrow

Université Abdelmalek Assaâdi
 FST Tanger/ Année 08-09
 M121/Groupes 1 et 2

Série de TD n°4

Exercice1

On définit les deux suites de fonctions (f_n) et (g_n) sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n}; n \geq 1 \text{ et } g_n(x) = \frac{nx}{nx+1}; n \geq 1.$$

1. Etudier la convergence simple de (f_n) et (g_n) .
2. Etudier leur convergence uniforme sur $[0, 1]$.
3. Etudier la convergence simple puis uniforme de (f_n) et (g_n) sur $[1, +\infty[$.

Exercice2

On définit la suite de fonctions $(f_n)_n$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 1 + x^2 \sin \frac{1}{nx} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[-a, a]; \forall a \in]0, +\infty[$.
2. Y a-t-il convergence uniforme sur \mathbb{R} ?

Exercice3

Soit $\alpha > 0$, on définit la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur \mathbb{R}^+ par

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}.$$

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$ sur \mathbb{R}^+ .
2. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[a, +\infty[; \forall a > 0$.
3. Etudier, suivant les valeurs de α , la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice4

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ de terme général

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} (x^{2n} - x^{2n+1}).$$

1. Montrer que la série converge uniformément sur $[0, 1]$. Soit $f(x)$ sa somme.
2. Montrer que f est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $[0, 1[$.

*Amal
 Maat*

Exercice 5

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

1. Montrer que cette série est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Calculer la somme de la série et montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .
Montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$; $a > 0$.

Exercice 6

1. Montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n}$ sont uniformément convergentes sur $[\delta + 2k\pi, (2k+2)\pi - \delta]$ avec $0 < \delta < \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.
2. Etudier les séries de fonctions de terme général

$$u_n(x) = \frac{\cos nx}{\ln n}; n \geq 2,$$

$$v_n(x) = \frac{\cos 2nx}{\ln n}; n \geq 2.$$

Exercice 7

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ de terme général

$$u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

1. Etudier la convergence simple, absolue et uniforme de cette série. Soit $f(x)$ sa somme.
2. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8

1. Soit $u_n(x) = \sqrt{n} x e^{-n^2 x}$; $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .
2. Soit α un réel donné. Trouver l'ensemble des réels x pour lesquels la série de terme général

$$v_n(x) = n^\alpha e^{-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}; n \geq 1,$$

est convergente. En déduire que $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$ converge normalement sur $]-\infty, \alpha]; \alpha < \alpha - 1$.

Exercice 1 $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$; $g_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$, $x \in [0,1]$

1/ Convergence simple de (f_n) sur $[0,1]$

• Si $x=0$ alors $f_n(0)=0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0)=0$

• Si $x \neq 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)=0$ donc (f_n) c.s vers $f=0$

Convergence simple de (g_n) sur $[0,1]$

Si $x=0$ alors $g_n(0)=0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(0)=0$

Si $x \neq 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{nx} = 1$

donc (g_n) c.s vers g telle que : $g(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & x \in]0,1] \end{cases}$

1 Convergence uniforme de (f_n) sur $[0,1]$

On a : $|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{x+n} = h(x)$, $h'(x) = \frac{n}{(x+n)^2} > 0$

h est croissante sur $[0,1]$ donc $\rho_n = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} h(x) = h(1) = \frac{1}{1+n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = 0$ donc (f_n) c.u vers f sur $[0,1]$

Convergence uniforme de (g_n) sur $[0,1]$

Si $x=0$ alors $|g_n(0) - g(0)| = 0$

Si $x \neq 0$ alors $|g_n(x) - g(x)| = \left| \frac{nx}{nx+1} - 1 \right| = \frac{1}{nx+1} = k(x)$

et $\forall x \in [0,1]$: $k'(x) = \frac{-n}{(nx+1)^2} \leq 0$

k est décroissante sur $[0,1]$ donc $\rho_n = \sup_{x \in [0,1]} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x \in [0,1]} k(x) = k(0) = 1$

(ρ_n) ne tend pas vers 0 donc la convergence de (g_n) n'est pas

uniforme vers g sur $[0,1]$

1 • (f_n) c.s vers f sur $[1, +\infty[$ et (g_n) c.s vers g sur $[1, +\infty[$

et $\forall x \in [1, +\infty[$ ($a > 0$) : $f(x) = 0$ et $g(x) = 1$

• On a $\rho_n = \sup_{[1, +\infty[} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{[1, +\infty[} k(x) = k(1) = \frac{1}{n+1}$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ donc (f_n) c.u. vers f sur $[1, +\infty[$

On a $\delta_n = \sup_{x \in [1, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [1, +\infty[} h(x)$

Par absurde, supposons que (f_n) c.u. vers f sur $[1, +\infty[$ alors

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} ; \forall n > N ; \forall x \in [1, +\infty[: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\forall n > N : \forall x \in [1, +\infty[: \frac{x}{x+n} < \varepsilon$

En particulier pour $x = n$: $\forall n > N : \frac{n}{n+n} < \varepsilon$ c.à.d. $\frac{1}{2} < \varepsilon$

Absurde, donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[1, +\infty[$

Exercice 2 $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 1+x^2 \sin \frac{1}{nx} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

1/ Convergence simple de (f_n) sur $[-a, a]$ avec $a > 0$

• Si $x=0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 1$

Si $x \neq 0$ alors $|f_n(x) - 1| = |x^2 \sin \frac{1}{nx}| = x^2 |\sin \frac{1}{nx}| \leq x^2 \cdot \frac{1}{|nx|} = \frac{|x|}{n}$

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$

d'où (f_n) c. u. vers f où $f(x) = 1 \forall x \in [-a, a]$

Convergence uniforme de (f_n) sur $[-a, a]$ vers f

On a $|f_n(a) - f(a)| = 0$

Si $x \neq 0$ alors $|f_n(x) - f(x)| = |x^2 \sin \frac{1}{nx}| \leq \frac{|x|}{n} \leq \frac{a}{n}$

d'où $0 \leq \delta_n = \sup_{x \in [-a, a]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{a}{n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0 \Rightarrow (f_n)$ c.u. vers f sur $[-a, a]$

2/ Si (f_n) c.u. vers f sur \mathbb{R} alors

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} ; \forall n > N \forall x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\forall n > N \forall x \in \mathbb{R} : |x^2 \sin \frac{1}{nx}| < \varepsilon$

En particulier (pour $x=n$) : $\forall n > N : n^2 \sin \frac{1}{n^2} < \varepsilon$

c.à.d. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2} = 0$ Absurde avec le fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2} = 1$

donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur \mathbb{R}

Exercice 3

$\alpha > 0$

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Rappel: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p e^{-x} = 0$

1/ Convergence simple de (f_n) sur \mathbb{R}^+

• Si $x=0$ alors $f_n(0)=0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0)=0$?

• Si $x>0$ fixé: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{N}{x}\right)^\alpha x e^{-N} = \lim_{N \rightarrow +\infty} x^{1-\alpha} (N^\alpha e^{-N}) = 0$

donc (f_n) c.s. vers la fonction f nulle sur \mathbb{R}^+

2/ Convergence uniforme de (f_n) sur $[a, +\infty[$; $a>0$

$$\forall x \geq a: |f_n(x) - f(x)| = n^\alpha x e^{-nx} \leq n^\alpha x e^{-na}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (n^\alpha x e^{-na}) = 0$ d'où pour $\varepsilon=1$; $\exists N \in \mathbb{N}$

tel que $\forall n > N: n^2 (n^\alpha x e^{-na}) < 1$

car $\forall n > N: n^\alpha x e^{-na} < \frac{1}{n^2}$

$$\text{d'où } 0 \leq \delta_n = \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$ et (f_n) c.u. vers f sur $[a, +\infty[$

Convergence uniforme de (f_n) sur $[0, +\infty[$

On pose $g(x) = |f_n(x) - f(x)| = n^\alpha x e^{-nx}$ définie sur $[0, +\infty[$

$$g'(x) = n^\alpha (e^{-nx} - nx e^{-nx}) = n^\alpha e^{-nx} (1 - nx)$$

x	0	1/n	+\infty
g'	+	0	-
g	0	↗	↘ 0

$$\text{On a } \delta_n = \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, +\infty[} g(x) = g\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\delta_n = n^\alpha \cdot \frac{1}{n} e^{-1} = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$$

Si $0 < \alpha < 1$ alors $\alpha-1 < 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$ donc (f_n) c.u. vers f sur $[0, +\infty[$

Si $\alpha > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = +\infty$ et si $\alpha=1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = \frac{1}{e}$

donc ces 2 cas (δ_n) ne tend pas vers 0 donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0, +\infty[$

Exercice 4 $U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} (x^{2n} - x^{2n+1})$

$$U_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} (2nx^{2n-1} - (2n+1)x^{2n}) = \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{n}} (2n - (2n+1)x)$$

$$U_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{2n}{2n+1}$$

x	0	$\frac{2n}{2n+1}$	1
$U_n'(x)$	0	+	-
$U_n(x)$	0		0

$$\forall x \in [0, 1] : U_n(x) \leq U_n\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$$

$$\text{et } U_n\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} \left(1 - \frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{1}{(2n+1)\sqrt{n}} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n}$$

$$\text{De plus } \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} = e^{2n \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)} = e^{-2n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)} \simeq e^{-2n \left(\frac{1}{2n}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\text{d'où } U_n\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \sim \frac{1}{e(2n+1)\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2e n^{3/2}}$$

$$\text{On a } \sum \frac{1}{n^{3/2}} \text{ c.v. (série de Riemann } d = 3/2 > 1)$$

donc $\sum U_n(x)$ est normalement convergente sur $[0, 1]$ donc $\sum U_n(x)$ est uniformément convergente

2/. On a: (U_n) continues sur $[0, 1]$ et $\sum U_n(x)$ c.u. vers f sur $[0, 1]$ donc f est continue sur $[0, 1]$

On peut écrire $U_n(x) = \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} - \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{n}}$

$$\text{et } \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}} - \frac{x^3}{\sqrt{1}} + \frac{x^4}{\sqrt{2}} - \frac{x^5}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} - \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{n}} \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\text{où } a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } a_{2n+1} = -\frac{1}{\sqrt{n}} = -a_{2n}$$

Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence

$$R = 1 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \right| = 1$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable

sur $] -1, 1[$ donc f dérivable sur $] -1, 1[$

Exercice 5 $U_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$; $S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \dots + U_n(x)$
 1/ Pour $x=0$; $U_n(0)=0$; $S_n(0)=0$; $\sum S_n(0)$ c.v vers 0
 Pour $x \neq 0$; $x^2+1 > 1$; $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1$; la série $\sum U_n(x)$ est une
 série géométrique de raison q ; $0 < q < 1$ donc elle est c.v.
 Ainsi $\sum U_n(x)$ est c.v sur \mathbb{R} .

2/ Pour $x=0$; $S(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(0) = 0$
 Pour $x \neq 0$; $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^2 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n = x^2 \cdot \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1$
 Rappel : $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$

d'où $S(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$
 • $\forall n \geq 1$: $U_n(x)$ est continue sur \mathbb{R} donc $S_n(x)$ est continue sur \mathbb{R}
 Comme S n'est pas continue sur \mathbb{R} (S n'est pas continue en 0) donc la
 convergence de $S_n(x)$ vers $S(x)$ n'est pas uniforme sur \mathbb{R} ; c-à-d que
 $\sum U_n(x)$ ne converge pas uniformément vers $S(x)$ sur \mathbb{R}


• soit $x \geq a > 0$; Alors $\sum U_n(x)$ c.v vers $S(x) = 1$
 $|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{x^2}{(1+x^2)^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^k$
 $= \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^n}$

On a $x \geq a \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+a^2} \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{1}{(1+a^2)^n}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+a^2)^n} = 0$ car $0 < \frac{1}{1+a^2} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, +\infty[} |S_n(x) - S(x)| = 0$
 donc $S_n(x)$ c.v uniformément vers $S(x)=1$ sur $[a, +\infty[$; $a > 0$

• De même sur $]-\infty, -a]$; $x \leq -a \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in]-\infty, -a]} |S_n(x) - S(x)| = 0$
 donc $S_n(x)$ c.v uniformément vers $S(x)=1$ sur $]-\infty, -a]$; $a > 0$

Exercice 6 1/ $U_n(x) = \frac{\sin nx}{n} = a_n(x) \cdot b_n(x)$ où $a_n(x) = \frac{1}{n}$; $b_n(x) = \sin nx$
 On a : $a_n > 0$; (a_n) décroissante ; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$; $2n - \frac{\delta}{2} = \frac{-\delta}{2}$

* $\left| \sum_{k=0}^n b_k(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$
 en effet : on a $\delta + 2k\pi \leq x \leq (2k+2)\pi - \delta \Rightarrow \frac{\delta}{2} + k\pi \leq \frac{x}{2} \leq k\pi + \pi - \frac{\delta}{2}$

$0 < \delta < \pi \Rightarrow 0 < \frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{2}$
 Si k pair alors $\sin \frac{x}{2} > \sin \frac{\delta}{2}$
 Si k impair alors $\sin \frac{x}{2} < -\sin \frac{\delta}{2}$
 d'où $|\sin \frac{x}{2}| > \sin \frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} < \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$


D'après le théorème d'Abel pour les séries de fonctions, la série converge uniformément sur $D = [\delta + 2k\pi, (2k+1)\pi - \delta]$

• $U_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$. Même méthode en prenant $b_n(x) = \cos nx$

2/. $U_n(x) = \frac{\cos nx}{\ln n}$; $a_n = \frac{1}{\ln n}$; $a_n > 0$, $(a_n) \downarrow$, $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \infty$

• $|\sum_{k=0}^n b_k| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} = M \quad \forall x \in D$: domaine de la question 1

donc $\sum U_n(x)$ c.v uniformément sur D

• $U_n(x) = \frac{\cos 2nx}{\ln n}$; $n \geq 2$; $a_n = \frac{1}{\ln n}$; $a_n > 0$, $(a_n) \downarrow$, $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \infty$

$|\sum_{k=0}^n b_k| = |\sum_{k=0}^n \cos 2kx| \leq \frac{1}{|\sin nx|} \leq \frac{1}{\sin \delta} = M \quad \forall n \in D'$ où

$D' = [\frac{\delta}{2} + k\pi, (k+1)\pi - \frac{\delta}{2}]$ et $0 < \delta < \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Th. d'Abel : $\sum U_n(x)$ c.v uniformément sur D'

Exercice 7/1. Pour $x < 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = +\infty$ donc $\sum U_n(x)$ diverge

• Pour $x > 0$; $-nx \leq 0 \Rightarrow e^{-nx} \leq 1 \Rightarrow \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ c.v (série de Riemann) donc $\sum U_n(x)$ est normalement c.v

sur $[0, +\infty[$ donc la série est simplement, absolument, uniformément c.v sur $[0, +\infty[$

2/. $\forall n \geq 1$: $U_n(x)$ continue sur $[0, +\infty[$ et $\sum U_n(x)$ c.v uniformément vers f sur $[0, +\infty[$: donc f est continue sur $[0, +\infty[$

• U_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $U_n'(x) = \frac{-n e^{-nx}}{1+n^2}$

* Pour $x=0$: $U_n'(0) = \frac{-n}{1+n^2} \sim -\frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum U_n'(0)$ div

* Pour $x > 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 U_n'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3 e^{-nx}}{1+n^2} = 0$ donc pour $\varepsilon = 1$

$\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N$: $|n^2 U_n'(x)| < 1 \Rightarrow |U_n'(x)| < \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ c.v $\Rightarrow \sum U_n'(x)$ est uniformément c.v sur $]0, +\infty[$ donc

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{-nx}}{1+n^2}$

Exercice 8 1/ $U_n'(x) = \sqrt{n} e^{-n^2 x} (1 - n^2 x)$

$\forall x \in \mathbb{R}^+ : U_n(x) \leq U_n(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{e \cdot n^{3/2}}$

On a $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ c.v (série de Riemann) $\Rightarrow \sum U_n(x)$ c.v normalement donc : unif. sur \mathbb{R}^+

2/. On considère la suite $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ qui converge vers $\beta \geq 0$ d'où $\exists \varepsilon_n \rightarrow 0$

telle que $U_n = \beta + \varepsilon_n$ et ainsi $U_n(x) = e^{x(\beta + \varepsilon_n) - d(\ln n + \beta + \varepsilon_n)} = e^{(x-d)\beta - d\varepsilon_n} \approx \frac{e^{-d\beta}}{n^{d-x}}$

$\sum \frac{1}{n^{d-x}}$ c.v si et si $d-x > 1$ c-à-d $x < d-1$ donc $\sum U_n(x)$ c.v si $x < d-1$.

• Considérons $1 < b < d-a$: Alors $\frac{1}{n^{d-x}} \leq \frac{1}{n^b}$ et $\sum \frac{1}{n^b}$ c.v $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^{d-x}}$ c.v et normalement



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..